

WRACA NOWE?

Michał Szurek

Uczyłem się algebry (niech ją diabeł porwie!) u starego pana Campbella z Hertfordu. (...) Stary doszedł do wniosku, że najmniej kłopotliwe jest rozwiązywanie zadań arytmetycznych. Zgodnie z tą regułą, o 9 rano, zaraz po rozpoczęciu lekcji każdy brał swą tabliczkę i zabierał się do dodawania. Po chwili wywoływano nas do odpowiedzi z zadanych lekcji. Kiedy odpytywanie się skończyło, każdy wracał na miejsce i znów liczył słupki - i tak dalej, bez najmniejszej odmiany. Pozostałe dziedziny wiedzy sprawiały wrażenie wysp (zwykle skalistych i niebezpiecznych).

C.S. Lewis: *Zaskoczony radością* (tłum. Magda Sobolewska), Polagra, Warszawa 1999.

Co było, co będzie? W tym numerze mniej rachunków, rozumowań, skomplikowanych zależności geometrycznych, za to więcej refleksji. Młodym Czytelnikom należy wyjaśnić, o co chodzi w tytule. W latach 1956-1989 w Polsce co pewien czas następował kryzys gospodarczy i polityczny. Po mniej lub bardziej burzliwych przejściach następowała odnowa... a po pewnym czasie wszystko było po staremu, do czasu kolejnego kryzysu. Hasło „odnowa” pojawiała się w oficjalnej propagandzie za każdym razem. Dlatego w mowie potocznej pojawił się zwrot „wraca nowe”.

Tak jest z nauczaniem matematyki w szkole, od lat... 100. Co pewien czas profesorom matematyki udaje się przekonać społeczeństwo, że do tej pory nauczano matematyki źle, ale od jutra będzie już wszystko dobrze. Następuje kolejna zmiana programu. Stan na dzisiaj to: jak najmniej „Królowej Nauk”, jak najłatwiej, jak najmniej myślenia. Stan taki utrzyma się pewnie kilka lat. Potem wahadło wachnie się w drugą stronę - tak, jak to było w latach siedemdziesiątych XX wieku. Czytelnicy powinni zauważyć, że nie wypowiadam swojego zdania, który sposób jest lepszy. „Ja nie skarżę, ja informuję” - powiedział pewien uczeń nauczycielce, gdy ta pytała, kto zbił szybę w klasie.

Czy matematyka się zmienia? Tak może zapytać uważny Czytelnik. Czy nowe badania matematyczne zmieniają tabliczkę mnożenia, czy pokazują, że pole trójkąta nie jest równe połowie iloczynu długości podstawy przez wysokość, czy pochodną sinusa nie jest już cosinus? Oczywiście, że nie. Dwa plus dwa będzie cztery, niezależ-

nie od tego, jaki polityk zostanie premierem Polski. Faktów matematycznych nie można przeinaczyć tak, jak historycznych. Historia jest subiektywna, matematyka nie. Można jednak zmieniać treści nauczania. Oto dobitny przykład. Po rewolucji 1917 roku w Rosji (mnie w szkole uczono, że była to Wielka Rewolucja Październikowa, obecnie jest ona nazywana przewrotem bolszewickim), w szkołach ZSRR nie uczono ułamków zwykłych (czyli takich jak np. $\frac{1}{2}$ czy $\frac{7}{11}$), a wyłącznie ułamków dziesiętnych. Uzasadniano to w ten sposób. Podaję na podstawie książki W. Cziczigina *Metodyka nauczania arytmetyki* (tłum. A. Lumbe) z 1950 roku: *Ułamki dziesiętne pod nazwą liczb dziesiętnych stanowią naturalne i najprostsze przedłużenie nameracji „w prawo”. Działania na ułamkach dziesiętnych są łatwiejsze niż odpowiednie działania na ułamkach zwykłych, gdyż są analogiczne do działań na liczbach całkowitych. W ćwiczeniach na ułamki dziesiętne można się nie krępować wielkością mianownika. Ułamki dziesiętne mają daleko większe znaczenie praktyczne i zastosowanie niż ułamki zwykłe, ponieważ są organicznie związane z metrycznym układem miar i otrzymywaniem wartości przybliżonych w dzieleniu liczb całkowitych.*

W 1931 roku uchwała Komitetu Centralnego Wszechzwiązkowej Partii Komunistycznej Bolszewików „ostro potępiła niedorzeczne odchylenia” i ułamki zwykłe wróciły do łask. Rzeczywiście, po opanowaniu ułamków dziesiętnych można o ułamkach zwykłych niemal zapomnieć - zwłaszcza dziś, gdy każdy może mieć kalkulator. Ale ułamków dziesiętnych nie da się zrozumieć bez opanowania ułamków zwykłych. Nie należy odstępować od historycznej drogi rozwoju pojęć matematycznych. Ponadto przyczyna i skutek zmieniają role: układ dziesiątkowy miar jest następstwem wprowadzenia ułamków dziesiętnych, a nie na odwrót. Przed rewolucją francuską nie było w zasadzie miar opartych na podziale na 10 części.

Możemy nie zdawać sobie sprawy, jak drobne sprawy dotyczące wychowania i nauczania początkowego mogą mieć wpływ na całą kulturę społeczeństwa. Spotkałem się z poglądem, że na obserwowany upadek kultury słowa pisanego ma również wpływ to, że dzieci nie uczą się już kaligrafii, a także - uwaga - że w pierwszej klasie uczymy się stawiać litery prosto, a nie pochyło (co jest podobno bardziej naturalne).

Czy umiemy dodawać? W języku potocznym słowo *dodać* to mniej więcej tyle co *przyłączyć, dostawić, uzupełnić*. Do pociągu dodano jeszcze jeden wagon, gospodyni domowa dodała sól do zupy, w dyskusji odzywamy się „no tak, a na dodatek...”, nauczyciel dodaje do pracy domowej jeszcze jedno zadanie. To, co dołączamy, jest mniejsze - podobnie jak mniejsza rzeka wpada do większej, a nie na odwrót, chociaż z fizycznego punktu widzenia to wszystko jedno: wody jednej i drugiej się mieszają. Wyjątkiem jest większy Bug, który wpada to mniejszej Narwi.

Ćwiczenie. Oblicz sumę $4 + 247$. Innymi słowy: do liczby 4 dodaj 247. Jaki wynik? 251? Bardzo dobrze. A teraz zastanów się, jak to obliczyłeś. Na pewno odwrotnie: do 247 dodałeś 4, prawda? To jedna z pierwszych zasad arytmetyki, ważna w nauczaniu początkowym: psychologicznie dodawanie nie jest przemienne. $4 + 247$ jest różne od $247 + 4$. Każdy podręcznik i każdy nauczyciel musi o tym pamiętać. Zresztą, można by zaprotestować, że jeśli do 4 misiów dołączymy 247, to nie jest to żadne dodawanie. Do 247 misiów można dodać 4, ale nie na odwrót.

Jak odejmujemy? Psychologicznie łatwiej jest odjąć liczbę mniejszą niż większą. Działanie $19 - 4$ jest psychologicznie łatwiejsze niż $19 - 11$; związane jest to z wyobrażaniem sobie odejmowania jako ujmowania.

W polskich szkołach ugruntował się sposób pisemnego odejmowania oparty właśnie na ujmowaniu. W austriackich szkołach (w XIX wieku) uczono sposobu przez dopełnianie. W sposobie tym, chcąc obliczyć $19 - 13$, zaczynamy, jak zwykle, od ostatniej cyfry, ale szukamy jej, zastanawiając się, ile trzeba „dorzucić” do trójki, żeby dostać 9 - nie zaś, ile trzeba ująć dziewiątce, by dostać 3. W obu sposobach musimy uciec się do „pożyczania” jednostki wyższego rzędu, gdy cyfra odjemna jest mniejsza od cyfry odjemnika. Niektórzy dydaktycy kwestionują nazywanie tego „pożyczaniem”, bo przecież jednostka ta nie zostaje potem w żaden sposób „zwrocona”.

Sposób z dopełnieniem przetrwał w praktycznym sposobie obliczania reszty, jaka nam się należy, gdy mamy 10 złotych za rzecz kosztującą np. 5 zł 45 groszy. Kasjer wydaje resztę, dopełniając 5,45 do 10. W związku z wprowadzeniem kas fiskalnych (które podają wartość reszty) i ten sposób może ulec zapomnieniu. Może szkoda: taki był „matematyczny”.

Jak mnożymy i dlaczego właśnie tak? Wszyscy umiemy mnożyć pisemnie. W średniowieczu mnożenie przeprowadzono w sposób bardziej skomplikowany, ale jak zobaczymy, ładniejszy. Przyjrzyjmy się najpierw algorytmowi, który stosujemy dziś:

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 = 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 7 \ 8
 \end{array}$$

Nie ma w nim nic ciekawego - tak odpowie 100 procent uczniów i 90 procent nauczycieli. W średniowieczu zapisywano mnożenie nieco inaczej. W tym sposobie mnożną piszemy u góry kwadratowej tabelki (której oczka podzielone są jeszcze na połowy), mnożnik zaś po lewej stronie, lecz od dołu do góry! Wynik dostajemy, sumując liczby w ukośnych rzędach tak, jak się zwykle liczby dodaje, a więc przenosząc naddatki do wyższych rzędów („jeden dalej” itd.).

	2	3	4	
7	1	2	2	8
6	1	2	2	7
5	1	2	2	6
	1	3	2	

	5	6	7	
4	2	2	2	8
3	1	2	2	7
2	1	2	2	6
	1	3	2	

Na takim diagramie bardzo ładnie widać przemienność mnożenia. Przy obliczaniu 567 razy 234 pojawi się bowiem ta sama tablica, tylko odbita symetrycznie względem przekątnej kwadratu, tworzącego tablicę. Gdy będzie-

my obliczać kwadrat liczby, w tablicy pojawi się ładna symetria, której nie zauważamy w „zwykłym”, szkolnym systemie mnożenia.

W sposobie tym musimy jedną z liczb (mnożnik) wpisać w „nienaturalnym” porządku: od dołu do góry. Wydaje się nam to kłopotliwe, ale powinniśmy sobie zdawać sprawę, że robimy to na co dzień. W zwykłym sposobie mnożenia też musimy zaczynać od prawej. Gdy wprowadzamy liczbę do kalkulatora, jej cyfry są umieszczane od prawej, mimo że czytamy je potem od lewej. Co jest naturalne, a co nie - zależy tylko od naszych przyzwyczajzeń!

Sposób ten jest istotnie (prawie dwukrotnie) szybszy od tradycyjnego, gdy chcemy podnieść dużą liczbę do kwadratu. Wtedy bowiem tabelka jest symetryczna i wystarczy wypełnić tylko jej lewą, górną połowę (nad przekątną i na przekątnej).

Dawniej było lepiej! Otóż sposób, który tu przypomniałem, jest dydaktycznie lepszy niż ten, którego uczymy się w drugiej klasie szkoły podstawowej! Chodzi o to, że na kartce zostaje ślad każdej operacji cząstkowej i po prostu łatwiej sprawdzić poprawność obliczeń. Dlaczego zatem nie naucza się mnożenia tak, tylko sposobem, który ocenilem jako gorszy? Trudno powiedzieć. Może dlatego, że „nasz” (ten, który wszyscy znamy) sposób wymaga mniej pisania, więcej obliczeń wykonuje się w pamięci, zajmuje mniej miejsca na kartce i nie trzeba uważnie dzielić kratek liniami ukośnymi na połowy. Gdyby jednak dwieście lat temu wybrano jako „wzorcowy” ten sposób mnożenia, który właśnie opisałem, każdy inny wydałby się nam dziwny. Ale proszę się nie obawiać. Nawet jeśli zostanę ministrem oświaty, nie zmienię podstaw matematyki szkolnej.

Kiedyś nie było kalkulatorów! Z lamusa matematyki wyciągnę jeszcze ciekawy sposób mnożenia na palcach. Dziękuję Markowi Kucharskiemu za zwrócenie mi uwagi na tę metodę. Jeśli nawet nie jest praktyczna, to bardzo ciekawa.

Umawiamy się, że liczby w zakresie do 5 umiemy mnożyć - to znaczy, że pamiętamy wszystkie iloczyny od jeden razy jeden do pięć razy pięć. Jeśli chcemy teraz obliczyć, ile jest na przykład siedem razy osiem, to u każdej ręki wystawiamy tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5. Pozostałe palce zaginamy. Następnie dodajemy palce wystawione (to będzie cyfra dziesiątek iloczynu) i mnożymy te zgięte (to cyfra jednostek iloczynu). Przykładowo, dla obliczenia, ile jest siedem razy dziewięć, wystawiamy w lewej ręce dwa palce (trzy zostają zagięte), w prawej cztery (jeden zgięty). Odczytujemy cyfrę dziesiątek: dwa plus cztery i cyfrę jednostek: trzy razy jeden.

Reguła ta wynika z prostej tożsamości:

$$ab = 10 [(a - 5) + (b - 5)] + (10 - a)(10 - b)$$

Interesujące jest to, że nie musimy się ograniczać do liczb wyrażających liczbę naszych palców. Chcąc pomnożyć osiem przez 12, zachowujemy regułę (wystaw nadwyżkę ponad 5) i wprowadzamy „ujemne palce”. Co będzie, jeżeli w każdej ręce wystawimy tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5? Na jednej z rąk to łatwo: wystawiamy trzy palce. Gorzej jest z drugą. Mamy pięć palców. Ile palców zostanie, gdy wystawimy siedem? Oczywiście minus 2. Dodajemy teraz palce wystawione. Jest ich $3 + 7$, a więc 10. Palców zgiętych jest... minus 4. Dziesięć dziesiątek plus minus cztery daje... 96. Podobne sposoby można zastosować do mnożenia innych liczb. Opracowanie pozostawiam Czytelnikom jako rozrywkę plażową albo na długie deszczowe dni w Tatrach... ●