CZ. II

Lîlâvatî to znaczy UROCZA, CZARUJĄCA!

Michał Szurek

Zagadka druga, (podana w Lilavati dla $n = 3$, uogólnienie jest pomysłem autora tych słów) może posłużyć jako przykład różnicy między matematykiem... a miłośnikiem rozrywek umysłowych. Ośmielam się głosić pogląd, że $n = 3$ to tylko „rozkosze łamania głowy", zaś „dowolne n" to już matematyka.

Panowie w kapeluszach

Było n panów, n kapeluszy czarnych i n-1 białych. Ustawiono panów rzędem: pierwszy widział wszystkich, drugi wszystkich poza pierwszym,..., ostatni nikogo. Włożono im kapelusze. Zapytano pierwszego pana, jaki ma kapelusz. Powiedział, że nie wie. Zapytano drugiego. Odpowiedział, że nie wie... I tak dalej aż do przedostatniego: „nie wiem!".

Ostatni z panów (ten, który nie widział żadnego), rzekł: „Skoro tak, to ja wiem, jaki mam kapelusz!". Jaki kapelusz ma ten pan? Biały czy czarny?

Będziemy dowodzić przez indukcję twierdzenia:

Jeśli k-ty pan widzi przed sobą same białe a poprzednik nie mógł rozstrzygnąć problemu, to k-ty zna kolor swojego kapelusza.

Gdy $k = 1$, to twierdzenie jest prawdziwe. Bo jeśli pierwszy widzi same białe, to widzi n -1 białych, czyli widzi <u>wszystkie</u> białe, jakie były. Dla niego zostaje zatem czarny.

Krok indukcyjny: załóżmy prawdziwość twierdzenia dla k. Rozpatrzmy pana k+1. Niech to będzie Kazik+1, a poprzednika nazwijmy Kazikiem. A więc <u>Kazik+1 widzi same białe, zaś Kazik nie wydedukował koloru kapelusza</u>.

Zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym - przed Kazikiem nie ma samych białych. Z podkreślonego zdania wynika, że Kazik+1 ma czarny i on o tym wie. To dowodzi twierdzenia dla k+1.

Stosując twierdzenie dla $k = n$-1 wnioskujemy, że przedostatni pan nie widzi przed sobą samych białych...

Wśród starych znajomych, w Lilavati znajdujemy też - prawie na samym początku książki - zadanie, którego rozwiązanie otrzymujemy z równania

$$2x \quad \frac{x}{2} \quad \frac{x}{4} \quad 1 \quad 100,$$

a które w niezliczonych wersjach i z rozmaitymi fabułami rozsiane jest po różnych książkach i nawet podręcznikach szkolnych. Przytoczę je tutaj za Karolem Żerą (*Wtóra próba na matematyka*, XVIII wiek).

– Pomagaj Bóg stom pannom! - młodzieniec mimo idąc rzekł do panien pracujących.

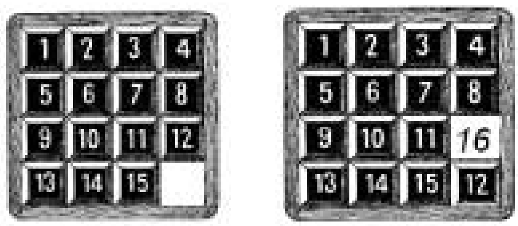
– Nie masz nas stu, jako ty powiadasz - na to jedna z panien odrzekła - ale by nas było dwa razy tak wiele jako jest i połowica tego i czwarta znowu część do tego i ty sam, wtedy właśnie będzie nas dopiero całe sto.

Urok zadania nie polega oczywiście na rozwiązaniu prościutkiego równania, ale na „interpretacji geometrycznej". Kto nie wie, to proszę natychmiast postarać się o egzemplarz Lilavati i przeczytać stosowny fragment. To jest zadanie do domu, do odrobienia!

Ciekawe są w Lilavati różne algorytmy. Omówię dwa, znów starając się matematyzować. Pod koniec XIX wieku modna była przez pewien czas prymitywna wersja kostki Rubika: Taquin (Piętnastka). W kwadracie o 16 polach jedno miejsce jest wolne, co umożliwia przesuwanie kamieni, ponumerowanych od 1 do 15. Gra polega na doprowadzeniu dowolnej startowej pozycji do standardowego porządku: 1,2,3,4,5,6,.. ., 13, 14, 15.

Teoria tej gry da się zapisać w kilku krótkich zdaniach, zrozumiałych dla każdego, kto.. . zna choć trochę teorię grup. Dla Szczepana Jeleńskiego była za skomplikowana i nie jest to żaden zarzut pod Jego adresem. W końcu telefonem komórkowym też się nie umiał posługiwać. W Jego czasach teoria grup była już dobrze rozwinięta i wykładana na niektórych uniwersytetach, ale raczej nie w Polsce. Też nie z powodu jakiegoś zapóźnienia, tylko co kraj, to obyczaj.

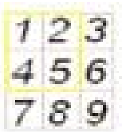
Teoria Taquin (Piętnastki)

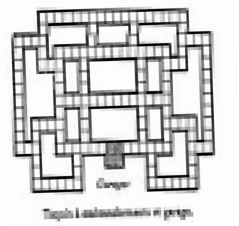


W wolnym polu dopisujemy liczbę np. 16. Pokolorujmy pola na biało i czarno, jak klasyczną szachownicę. Niech k będzie kolorem wolnego pola, s znakiem permutacji. Zauważmy, że każdy ruch zmienia parę (k, s) (Z2×Z2) na przeciwną. Stąd dowód warunku koniecznego. Wskazówka do dowodu dostateczności: wykazać wykonalność cyklu np. (123).

Teoria grup w telefonie komórkowym

Wspomniałem wyżej o telefonie komórkowym. Posiadacze Nokii mogą ćwiczyć się w teorii grup, grając w *Rotation*. Klawiszami wykonujemy takie ruchy, jak przykładowo podane jest niżej: obrót lewego górnego kwadratu. Można obracać jeszcze trzy pozostałe: prawy górny, prawy dolny i lewy dolny. Cel: doprowadzić dowolny układ wyjściowy do układu normalnego, 123456789.





W języku teorii grup można to tak ująć: wykazać, że grupa permutacji S_9 jest generowana przez podane obroty. Każdy zaś... matematyk powinien zastanowić się nad uogólnieniem tego zadania na grę w dowolnym prostokącie. Informatyk niech poszuka dobrych algorytmów. I jeszcze wycieczka w topologię: stworzyć teorię gry w Taquin w dowolnych obszarach, takich jak na rysunku powyżej.

* * *

Historia est magistra vitae. Historia jest nauczycielką życia. Przez całe lata, jeszcze za szkolnych czasów, śmieszyła mnie i oburzała nazwa „egzamin dojrzałości" na określenie sprawdzianu wiedzy z kilku przedmiotów, jakie trzeba wykuć w szkole. Do czego jestem „dojrzały" po zapamiętaniu, na czym oddycha mitochondria i w jakich latach panował król Burburyk - albo i co wyjdzie, gdy do kwadratu sinusa dodam kwadrat kosinusa? Po latach zrozumiałem. Chodzi o dojrzałość intelektualną. Nie sumę wiedzy, bo ta zależy od dobrej pamięci i od kawałka ołowiu w miejscu.. . łączącym człowieka z krzesłem. Ale chodzi o dojrzałość w zmaganiach się z problemem intelektualnym. Umiejętność rozłożenia go na... czynniki pierwsze. Dostrzeżenia aspektów, bocznych arabesek, konsekwencji, uogólnień.. . i tak dalej i tak dalej. To już dawno zanikło na „starej maturze". Jeśli zostanie reaktywowane na nowej, to *chapeau bas*. Takie będą Rzeczpospolite, jakie ich młodzieży chowanie. Czy Szczepan Jeleński dobrze się zasłużył przyszłym pokoleniom? Kilka uwag na ten temat będzie w końcowej części artykułu, ze stosownym wyimkiem z *Boskiej Komedii*. Tu zaś, skoro zgadało się o maturze, przypomnijmy sobie, że w tym dziele (Raj, pieśń XIII) Święty Tomasz przekazuje Dantemu przesłanie, że król Salomon prosił Boga o prawdziwą mądrość...

Nie zaś, by niebios ruchadła policzył
Lub z dwu przesłanek, co są w sobie sprzeczne
Musu z przypadkiem następstwo wytyczył.
Zgadł, są-li dźwignie ruchu ostateczne.
Wkreślił w półkole trójkąt, gdzie by wcięcie
Kąta prostego nie było konieczne.

Powodzenia na maturze '2005, drodzy... nauczyciele!

Oto dwie opinie z wczesnych lat trzydziestych. Pierwszej z nich nie należy lekceważyć. Jej autor był uznanym matematykiem, autorem m.in. książki o geometriach nieeuklidesowych.

Obie książki p. Szczepana Jeleńskiego czyta się z przyjemnością i wyraźną sympatją dla autora. Nie mogło być inaczej: zapał i entuzjazm, tchnący z każdej stronicy, ujmuje i pociąga. Niema dla autora w rozważanych tematach rzeczy obojętnych: każda zasługuje na pełne zainteresowanie - zarówno wielkie prawdy matematyczne, genjalne odkrycia, jak i drobne fakciki, właściwości nieledwie banalne - wszystko jest godne uwagi, wszystko jest „pełne czaru", dziwne i niezwykłe. (Stefan Kulczycki, Parametr*)*

(...) Autor sam podkreśla, że chodzi mu raczej o rozrywkę, ciekawe i mądre zajęcie (...). I właśnie tę rolę książka spełnia sumiennie. Mathesis polska

Myśli końcowe

Entuzjazm jest pożądany (wychowanie przez przykład). Olbrzymi plus dla Szczepana Jeleńskiego.

Entuzjazm powinien być jednak oparty na znajomości zagadnienia. Niekiedy widać, że Autor „nie czuje" własnego tekstu. Mały minus.

Stosunkowo często zadziwia się banalnymi faktami, uznając je za arcyciekawe. Nie jest ani na plus, ani na minus. Po prostu tak jest. Może króciutki minusik.

Z książkami Szczepana Jeleńskiego da się uprawiać matematykę. Nie każde dobre książki o matematyce umożliwiają to Czytelnikowi. Plus, zdecydowany plus dla Sz. J.

Ale: Sz. J. przekazuje w sumie niewłaściwy obraz matematyki. Prezentowana jest ona jako dość statyczna nauka. A ona jest inna, niż wynikało by to z lektury Lilavati i Śladami Pitagorasa. Ale: czy to jest źle? Hugo Steinhaus mawiał, że matematyka jest ostrym narzędziem. Nie należy takiego narzędzia dawać dzieciom.

Czy prawdziwy obraz matematyki jest jednak tak aż atrakcyjny? Zbyt wiele dobrych książek i czasopism popularyzuje matematykę dla koneserów. Popularyzacja matematyki wśród matematyków jest o wiele trudniejszym zadaniem, niż innemu audytorium. No, bez przesady. Mimo wszystko, hasło „matematyka jako nasza niedostrzegana kultura" zdziwiło by Szczepana Jeleńskiego. Minus.

Kolejny plus zdobywa jednak Jeleński za możliwość stosowania swoich książek na lekcjach szkolnych. W każdym razie w szkole lat i trzydziestych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia. Dziewięćdziesiątych również. Nie każda książka popularna tak wciąga. A do całości życia i twórczości Szczepana Jeleńskiego da się zastosować, toute proportion gardee, słowa Dantego z Boskiej Komedii (tłum. Edward Porębowicz):

Jak geometra wykreśla rysunek
Na kwadraturę koła i zestawia
Z nieupewnionych danych swój rachunek,
Tak mnie zjawienie nowe zastanawia.

Summa sumarum

Jakiej matematyki uczy nas Szczepan Jeleński. Zaraz, zaraz, jakich *nas*, kto to jesteśmy *My*. Tak. Słusznie. Uściślę pytanie. Jaką matematykę pokazywał mi (M. Sz.) Szczepan Jeleński? To zależy. Było to zmienne w czasie. Punkt widzenia zależy od punktu siedzenia. Jak to ze mną było? **1960**: bardzo ciekawą i atrakcyjną, tajemniczą. **1980**: fałszywą. **2000**: ciekawą, bo widzę to, czego niestety Autor wtedy nie widział. Widzę, bo Lilavati i Śladami „znało się" na pamięć, bo studiowałem matematykę i z tej racji, że przez 70 lat wiele się wydarzyło. ●